- Integrali racionalnih funkcija - (1.)

Racionalnom funkcijom nazivamo izraz oblika $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi.

Ako je $st P(x) < st Q(x)$, tada racionalnu funkciju nazivamo pravilnom a ako je $st P(x) \geq st Q(x)$ racionalnu funkciju nazivamo nepravilnom.

Dijeljenjem polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ svaku nepravilnu racionalnu funkciju možemo predstaviti kao zbir polinoma i jedne pravilne racionalne funkcije.

Slijedeće pravilne racionalne funkcije nazivamo prostim racionalnim funkcijama:

I: $\frac{1}{x-a}$, II $\frac{1}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, \ldots$

III: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ IV: $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $n = 2, 3, \ldots$

pri čemu su A, B, p, q realni brojevi i diskriminanta kvadratnog trinoma x^2+px+q u slučajevima III i IV je manja od nule.

Primjer 1:

a) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

Kako je $x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$ to podintegralnu funkciju razlažemo na sledeći način:

$$\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Odredimo konstante A, B, C iz uslova:

$$2x^2-1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

$$2x^2-1 = A(x^2-5x+6) + B(x^2-3x) + C(x^2-2x)$$

$$2x^2-1 = (A+B+C)x^2 + (-5A-3B-2C)x + 6A.$$

Iz sistema: $A+B+C=2$

$-5A-3B-2C=0$, dobijamo $A=-\frac{1}{6}$

$\cancel{6A=1}$ $B=-\frac{7}{2}$

$6A=-1$ $C=\frac{17}{3}$

pa je $\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{17}{3}\cdot\frac{1}{x-3}$

Dakle, $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{17}{3}\int\frac{dx}{x-3} =$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C.$$

to je:

$$\circledast = \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\left(\ln(x^2+2x+2) + 14\,\mathrm{arctg}(x+1)\right) + C.$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

R: Primijetimo da je stepen polinoma u imeniocu manji od stepena polinoma u brojiocu.

$$(x^6+x^4-1):(x^4+x^2+1) = x^2$$
$$\frac{-(x^6+x^4+x^2)}{-x^2-1}$$

Dakle, $\displaystyle\frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1} = x^2 - \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1}\,dx = \int x^2 dx - \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \circledast$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = ?$$

$$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

$$\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow\; x^2+1 = (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-x+1)$$

$$x^2+1 = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (A+B+C-D)x + B + D.$$

Iz sistema:

$$\begin{aligned} A+C&=0 \\ A+B-C+D&=1 \\ A+B+C-D&=0 \\ B+D&=1 \end{aligned}$$

dobijamo $A=C=0$, $B=D=\frac{1}{2}$.

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} \quad (1)$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\begin{bmatrix} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\frac{4t^2}{3}+1}=\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\begin{bmatrix} \frac{2t}{\sqrt{3}}=s \\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}ds \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{ds}{s^2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} s+C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Slično, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

pa iz (1) dobijamo:

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

odnosno:

$$\int\frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

– Integrali nekih klasa trigonometrijskih funkcija –

1) Razmatramo integral oblika:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \qquad (1)$$

gdje je R racionalna funkcija.

Integral (1) se smjenom $tg\frac{x}{2}=t$ svodi na integral racionalne funkcije. Za to je potrebno izraziti $\sin x$, $\cos x$ i dx pomoću t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$t=tg\frac{x}{2},\quad x=2\,arctg\,t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Ovakvom smjenom integral (1) svodi se na integral racionalne funkcije.

Primjer 1: $\displaystyle\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x} = \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right]$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{5+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t^2+t+4} = \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\frac{1+2t}{\sqrt{15}}+C = \frac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\frac{1+2\,tg\frac{x}{2}}{\sqrt{15}}+C.$$

2) Ako integral ima oblik $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ tada se smjenom $\sin x = t$ ovaj integral svodi na integral racionalne funkcije. Slično, ako integral ima oblik $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ uvodimo smjenu $\cos x = t$.

3) Ako integral ima oblik $\int R(tg\,x)dx$ onda se smjenom $tg x = t$ ovaj integral svodi na integral racionalne funkcije.

Primjeri: a) $\int \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{3-t} =$

$= \ln|t-3| + C = \ln|\cos x - 3| + C.$

b) $\int tg^4 x\,dx = \begin{bmatrix} tg x = t \\ x = arctg\,t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt =$

$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^3}{3} - t + arctg\,t + C =$

$= \frac{tg^3 x}{3} - tg\,x + x + C.$

4) Ako podintegralna funkcija ima oblik $R(\sin x, \cos x)$ pri čemu su $\sin x$ i $\cos x$ samo sa parnim stepenima, tada se smjenom $tg x = t$ dati integral svodi na integral racionalne funkcije. Za transformaciju podintegralnog izraza potrebno je $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, i dx izraziti pomoću t:

$$(*) = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(1-\cos x)(3+\cos x)}{(1+\cos x)^2} \right| + C.$$

6) Razmotrimo integrale oblika $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ gdje su m i n cijeli brojevi

1. slučaj: Ako je bar jedan od brojeva m i n neparan, npr. $n = 2p+1$ gdje je $p \in \mathbb{Z}$, tada je:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \, (1-\sin^2 x)^p \cos x \, dx.$$

Ovaj integral rješavamo smjenom $\sin x = t$.

<u>Primjer 5:</u> $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \, (1-\sin^2 x) \cos x \, dx =$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{bmatrix} = \int t^2 (1-t^2) \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2. slučaj: a) Ako su m i n parni brojevi i $m = 2p$, $n = 2q$ gdje su $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Tada je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, pa je $\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx$

b) Ako su m i n parni brojevi pri čemu je bar jedan od njih negativan, uvodi se smjena $\operatorname{tg} x = t$ (ili $\operatorname{ctg} x = t$).

- Integrali nekih iracionalnih funkcija -

1. a) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ b) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ d) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \to$ za vježbu

R/ a) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt$

$= a^2 \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt =$

$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C =$

$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C$

$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

$\left(\sin t = \frac{x}{a},\ t = \arcsin\frac{x}{a}\right)$.

b) $I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2+x^2} & dv = dx \\ du = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} & v = x \end{matrix} \right| =$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx =$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$